Matemáticas 2 - Parcial 2.

Resolución : Parcial 2 - MA1112.

1. (5 ptos c/u) Calcular las siguientes integrales

$$1.1. \quad \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\, dx.$$

Solución : Se propone el cambio de variable

$$u = \sqrt{e^x - 1} \implies e^x = u^2 + 1, \qquad du = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x - 1}}\, dx \implies \frac{2u\, du}{u^2 + 1} = dx,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Cambiamos el intervalo de integración

$$\text{Si} \quad x = 0, \quad \text{entonces,} \quad u = \sqrt{e^0 - 1} = \sqrt{1 - 1} = \sqrt{0} \implies u = 0$$

$$\text{Si} \quad x = \ln 2, \quad \text{entonces,} \quad u = \sqrt{e^{\ln 2} - 1} = \sqrt{2 - 1} = \sqrt{1} \implies u = 1,$$

la integral queda

$$\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\, dx = \int_0^1 u \, \frac{2u\, du}{u^2 + 1} = 2\int_0^1 \frac{u^2}{u^2 + 1}\, du = 2\int_0^1 \frac{u^2 + 1 - 1}{u^2 + 1}\, du$$

$$= 2\int_0^1 \frac{\left(u^2 + 1\right) - 1}{u^2 + 1}\, du = 2\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{u^2 + 1}\right) du = 2\left(u - \arctan u \,\Big|_0^1\right.$$

$$= 2\left(\left((1) - \arctan(1)\right) - \left((0) - \arctan(0)\right)\right) = 2\left[1 - \frac{\pi}{4}\right] = 2 - \frac{\pi}{2}.$$

Luego,

$$\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\, dx = 2 - \frac{\pi}{2}.$$

★

1. (5 ptos c/u) Calcular las siguientes integrales

$$1.2. \qquad \int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\sqrt[5]{\sec x}}\, dx$$

Solución : Es conocido que

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}, \qquad \text{de aquí}, \qquad \cos x = \frac{1}{\sec x},$$

por lo que, la integral se escribe

$$\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\sqrt[5]{\sec x}}\, dx = \int \sqrt[5]{\cos x}\, \operatorname{sen}^3 x\, dx = \int \sqrt[5]{\cos x}\, \operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen} x\, dx,$$

de la identidad trigonmétrica básica

$$\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1 \qquad \text{despejamos } \operatorname{sen}^2 x \qquad \operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x,$$

así,

$$\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\sqrt[5]{\sec x}}\, dx = \int \sqrt[5]{\cos x}\left(1 - \cos^2 x\right) \operatorname{sen} x\, dx.$$

Se propone el cambio de variable

$$u = \cos x, \qquad du = -\operatorname{sen} x\, dx \quad \Longrightarrow \quad -du = \operatorname{sen} x\, dx,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

La integral se transforma en

$$\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\sqrt[5]{\sec x}}\, dx = \int \sqrt[5]{\cos x}\left(1 - \cos^2 x\right) \operatorname{sen} x\, dx = \int \sqrt[5]{u}\left(1 - u^2\right)\left(-du\right).$$

Resolvemos

$$\begin{aligned} \int \sqrt[5]{u}\left(1 - u^2\right)\left(-du\right) &= -\int u^{1/5}\left(1 - u^2\right) du = -\int \left(u^{1/5} - u^{1/5} u^2\right) du \\ &= -\int \left(u^{1/5} - u^{11/5}\right) du - \left(\frac{u^{1/5+1}}{\frac{1}{5}+1} - \frac{u^{11/5+1}}{\frac{11}{5}+1}\right) + C \\ &= -\frac{u^{6/5}}{\frac{6}{5}} + \frac{u^{16/5}}{\frac{16}{5}} + C = -\frac{5}{6} u^{6/5} + \frac{5}{16} u^{16/5} + C. \end{aligned}$$

Entonces

$$\int \sqrt[5]{u}\left(1 - u^2\right)\left(-du\right) = -\frac{5}{6} u^{6/5} + \frac{5}{16} u^{16/5} + C,$$

como $u = \cos x$, se tiene que

$$\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\sqrt[5]{\sec x}}\, dx = -\frac{5}{6}\left(\cos x\right)^{6/5} + \frac{5}{16}\left(\cos x\right)^{16/5} + C = -\frac{5}{6}\cos^{6/5} x + \frac{5}{16}\cos^{16/5} x + C.$$

Luego

$$\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\sqrt[5]{\sec x}}\, dx = -\frac{5}{6}\cos^{6/5} x + \frac{5}{16}\cos^{16/5} x + C.$$

★

1. (5 ptos c/u) Calcular las siguientes integrales

$$1.2. \qquad \int \frac{x \operatorname{arcsen} x}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}\, dx$$

Solución : Integramos por partes

$$u = \operatorname{arcsen} x \qquad \xrightarrow{\text{Al derivar}} \qquad du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

$$dv = \frac{x}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}\, dx \qquad \xrightarrow{\text{Al integrar}} \qquad v = \ ?$$

Calculamos $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}\, dx$. Proponemos el cambio de variable

$$z = 1 - x^2, \qquad du = -2x\, dx \quad \Longrightarrow \quad -\frac{du}{2} = dx,$$

así, la integral queda

$$\int \frac{x}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}\, dx = \int \frac{1}{\sqrt{u^3}} \left(-\frac{du}{2}\right) = -\frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u^3}} = -\frac{1}{2}\int \frac{du}{u^{3/2}}$$

$$= -\frac{1}{2}\int u^{-3/2}\, du = -\frac{1}{2}\,\frac{u^{-3/2+1}}{-\frac{3}{2}+1} + C = -\frac{1}{2}\,\frac{u^{-1/2}}{-\frac{1}{2}} + C$$

$$= u^{-1/2} + C = \frac{1}{u^{1/2}} + C = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + C.$$

Por lo tanto,

$$\int \frac{x}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + C,$$

entonces

$$u = \operatorname{arcsen} x \qquad \xrightarrow{\text{Al derivar}} \qquad du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

$$dv = \frac{x}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}\, dx \qquad \xrightarrow{\text{Al integrar}} \qquad v = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

La integral se transforma

$$\int \frac{x \operatorname{arcsen} x}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}\, dx = \operatorname{arcsen} x \, \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

$$= \frac{\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}} - \int \frac{dx}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2} = \frac{\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}} - \int \frac{dx}{1-x^2}.$$

Calculamos la nueva integral $\displaystyle\int \frac{dx}{1-x^2}$, haciendo el cambio trigonométrico

$$x = \operatorname{sen} t, \qquad\qquad dx = \cos t \, dt,$$

así,

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \int \frac{\cos t \, dt}{1-\operatorname{sen}^2 t} = \int \frac{\cancel{\cos t}\, dt}{\cancel{\cos^2 t}\, \cos t} = \int \frac{dt}{\cos t} = \int \sec t \, dt = \ln\left|\sec t + \tan t\right| + C,$$

de aquí,

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \ln\left|\sec t + \tan t\right| + C.$$

Regresamos el cambio de variable trigonométrico, puesto que

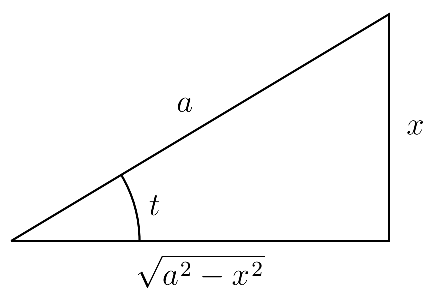
$$x = \operatorname{sen} t, \qquad \text{entonces} \qquad \frac{x}{1} = \operatorname{sen} t = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}}.$$

Para calcular los términos $\sec t$ y $\tan t$ en función de x nos ayudamos con el triángulo trigonométrico rectángular

$$x = a \operatorname{sen} t \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{x}{a} = \operatorname{sen} t = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}}$$

Por el **Teorema de Pitágoras** :

$$\text{Cateto adyacente} \;\; = \sqrt{a^2 - x^2}$$



así, como $a = 1$, entonces

$$\sec t = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto adyacente}} = \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}} \overset{a=1}{=} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \text{es decir,} \qquad \sec t = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

mientras que

$$\tan t = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto adyacente}} = \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} \overset{a=1}{=} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \text{es decir,} \qquad \tan t = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Por lo que, se tiene que

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \ln\left| \sec t + \tan t \right| + C = \ln\left| \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right| + C = \ln\left| \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} \right| + C.$$

Luego

$$\int \frac{x \operatorname{arcsen} x}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}\, dx = \frac{\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}} - \ln\left| \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} \right| + C.$$

★

2. (4 ptos) Hallar el dominio de la función $f(x) = \dfrac{\sqrt{\operatorname{senh} x}}{e^x - \ln x} - \left|\operatorname{csch}\left(\ln x\right) + 2x\right|$.

Solución : La función f tiene sentido cuando

$$\textbf{Condición 1} \ \left(\text{dada por la } \sqrt{(\cdot)}\right) : \ \boldsymbol{\operatorname{senh} x \geq 0}$$

$$\textbf{Condición 2} \ \left(\text{dada por el } \frac{1}{(\cdot)}\right) : \ \boldsymbol{e^x - \ln x \neq 0}$$

$$\textbf{Condición 3} \ \left(\text{dada por el } \ln(\cdot)\right) : \ \boldsymbol{x > 0}$$

$$\textbf{Condición 4} \ \left(\text{dada por la } \operatorname{csch}(\cdot)\right) : \ \boldsymbol{\operatorname{senh}\left(\ln x\right) \neq 0}$$

Veamos que nos arroja cada condición

- **Condición 1** : $\boldsymbol{\operatorname{senh} x \geq 0}$. Es conocido que

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

así,

$$\operatorname{senh} x \geq 0 \iff \frac{e^x - e^{-x}}{2} \geq 0 \iff e^x - e^{-x} \geq 0 \iff e^x \geq e^{-x},$$

aplicamos $\ln(\cdot)$ a ambos lados de la desigualdad, puesto que, $\ln(\cdot)$ es una función creciente, entonces la desigualdad se mantiene, obtenemos

$$e^x \geq e^{-x} \iff \ln\left(e^x\right) \geq \ln\left(e^{-x}\right) \iff x \geq -x$$
$$\iff x + x \geq 0 \iff 2x \geq 0 \iff x \geq 0,$$

la desigualdad se mantiene, ya que 2 es un número positivo.

Luego

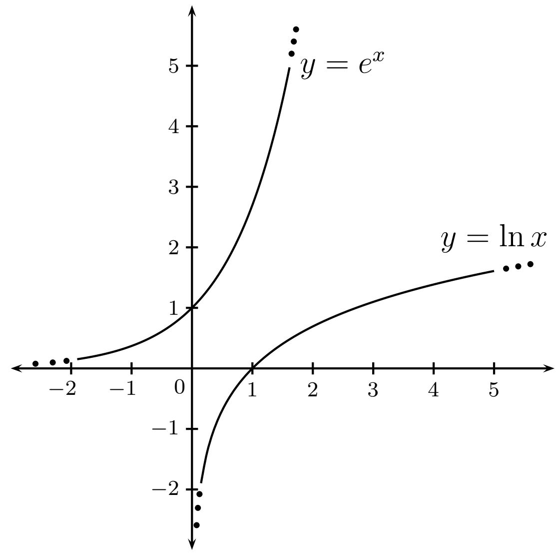
$$\operatorname{senh} x \geq 0 \iff \boldsymbol{x \in \left[0, +\infty\right)}.$$

- **Condición 2** : $e^x - \ln x \neq 0$. Observemos que, resolver esta no igualdad, es equivalente a resolver la igualdad

$$e^x - \ln x = 0,$$

es decir, buscar los valores de x donde la función exponencial natural y la función logaritmo natural sean iguales, y dichos valores excluirlos del conjunto de definición.

Veamos las gráficas de las funciones



De la representación grafica se tiene que dichas funciones no tienen puntos en común, así, la expresión $\dfrac{1}{e^x - \ln x}$ tiene sentido para todo x en $\left(\mathbf{0}, +\infty\right)$.

- **Condición 3** : $x > 0$. Se tiene que, $\boldsymbol{x} \in \left(\mathbf{0}, +\infty\right)$.

- **Condición 4** : $\operatorname{senh}\left(\ln x\right) \neq 0$. Observemos que, resolver esta no igualdad, es equivalente a resolver la igualdad
$$\operatorname{senh}\left(\ln x\right) = 0,$$
es decir, buscar los valores de x donde la función exponencial natural y la función logaritmo natural sean iguales, y dichos valores excluirlos del conjunto de definición.

  Puesto que,
$$\operatorname{senh}(\cdot) = \frac{e^{(\cdot)} - e^{-(\cdot)}}{2},$$
entonces
$$\operatorname{senh}\left(\ln x\right) = \frac{e^{\ln x} - e^{-\ln x}}{2} = \frac{x - e^{\ln\left(x^{-1}\right)}}{2} = \frac{x - x^{-1}}{2} = \frac{x - \dfrac{1}{x}}{2} = \frac{\dfrac{x^2 - 1}{x}}{2} = \frac{x^2 - 1}{2x},$$
por lo tanto,
$$\operatorname{senh}\left(\ln x\right) = 0, \qquad \text{es equivalente a} \qquad \frac{x^2 - 1}{2x} = 0,$$
para $x > 0$. De aquí
$$\frac{x^2 - 1}{2x} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 - 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \pm 1,$$
como $x > 0$, entonces $x = 1$.

  Entonces
$$\operatorname{senh}\left(\ln x\right) \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{x} \in \left(\mathbf{0}, +\infty\right) \setminus \left\{\mathbf{1}\right\}.$$

Luego, el dominio de f es

$$\operatorname{Dom} f = \left[\mathbf{0}, +\infty\right) \bigcap \left(\mathbf{0}, +\infty\right) \bigcap \left(\mathbf{0}, +\infty\right) \bigcap \left(\mathbf{0}, +\infty\right) \setminus \left\{\mathbf{1}\right\} = \left(0, +\infty\right) \setminus \left\{1\right\},$$

es decir

$$\operatorname{Dom} f : \left(0, +\infty\right) \setminus \left\{1\right\}.$$

★

3. (a) (3 ptos) Obtenga la fórmula de reducción para

$$\int \tan^n x \, dx.$$

Solución : Escribimos la integral como

$$\int \tan^n x \, dx = \int \tan^{n-2} x \tan^2 x \, dx,$$

de la identidad trigonométrica básica

$$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x, \qquad \text{despejamos } \tan^2 x, \qquad \tan^2 x = \sec^2 x - 1,$$

así,

$$\int \tan^n x \, dx = \int \tan^{n-2} x \tan^2 x \, dx = \int \tan^{n-2} x \left(\sec^2 x - 1\right) dx$$

$$= \int \tan^{n-2} x \sec^2 x \, dx - \int \tan^{n-2} x \, dx,$$

donde, para $\int \tan^{n-2} x \sec^2 x \, dx$, se propone el cambio de variable

$$u = \tan x, \qquad du = \sec^2 x \, dx,$$

la integral queda

$$\int \tan^{n-2} x \sec^2 x \, dx = \int u^{n-2} \, du = \frac{u^{n-1}}{n-1} + C = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} + C,$$

entonces

$$\int \tan^n x \, dx = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - \int \tan^{n-2} x \, dx.$$

★

(b) (2 ptos) A partir del desarrollo obtenido en 3a, calcule

$$\int \tan^5 x \, dx.$$

Solución : Se tiene, por 3a, que

$$\int \tan^5 x \, dx = \frac{\tan^4 x}{4} - \int \tan^3 x \, dx = \frac{\tan^4 x}{4} - \left(\frac{\tan^2 x}{2} - \int \tan x \, dx\right)$$

$$= \frac{\tan^4 x}{4} - \frac{\tan^2 x}{2} + \ln\left|\sec x\right| + C.$$

Luego

$$\int \tan^5 x \, dx = \frac{\tan^4 x}{4} - \frac{\tan^2 x}{2} + \ln\left|\sec x\right| + C.$$

★

4. (6 ptos) Calcular el área de la región limitada por las expresiones

$$\left|x+1\right|+\left|y\right|\leq 1, \qquad y\leq x^2 \qquad \text{y} \qquad x+y^2+\frac{5}{4}\geq 0,$$

en el segundo cuadrante.

Solución : Graficamos la región a la cual se le quiere calcular el área

- Para $\left|x+1\right|+\left|y\right|\leq 1$. Graficamos la curva $\left|x+1\right|+\left|y\right|=1$

  Por definición de valor absoluto se tiene

$$\left|x+1\right|=\begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x+1\geq 0 \\ -\left(x+1\right) & \text{si} \quad x+1<0 \end{cases} = \begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x\geq -1 \\ -\left(x+1\right) & \text{si} \quad x<-1, \end{cases}$$

  mientras que

$$\left|y\right|=\begin{cases} y & \text{si} \quad y\geq 0 \\ -y & \text{si} \quad y<0. \end{cases}$$

  De aquí,

  (a) Si $x+1\geq 0$ y $y\geq 0$, entonces

$$\left|x+1\right|+\left|y\right|=1 \qquad \Longrightarrow \qquad x+1+y=1 \qquad \Longrightarrow \qquad y=-x.$$

  (b) Si $x+1\geq 0$ y $y<0$, entonces

$$\left|x+1\right|+\left|y\right|=1 \qquad \Longrightarrow \qquad x+1-y=1 \qquad \Longrightarrow \qquad y=x.$$

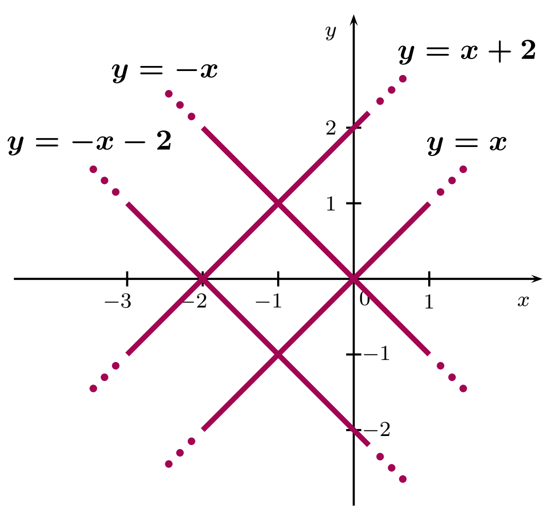
  (c) Si $x+1<0$ y $y<0$, entonces

$$\left|x+1\right|+\left|y\right|=1 \qquad \Longrightarrow \qquad -x-1-y=1 \qquad \Longrightarrow \qquad y=-x-2.$$

  (d) Si $x+1<0$ y $y\geq 0$, entonces

$$\left|x+1\right|+\left|y\right|=1 \qquad \Longrightarrow \qquad -x-1+y=1 \qquad \Longrightarrow \qquad y=x+2.$$

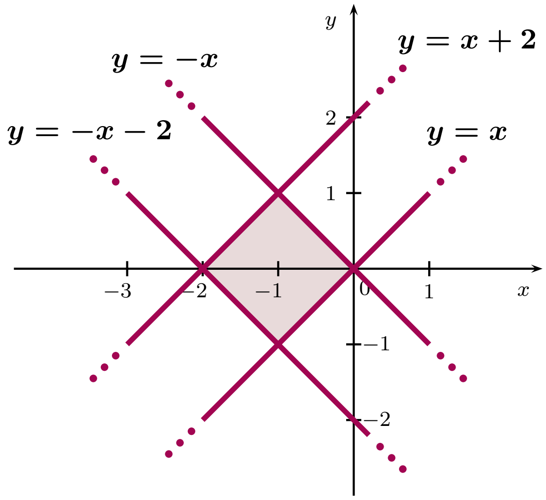
  Entonces



Elegimos un punto arbitrario en el plano cartesiano, por ejemplo $\left(-1,0\right)$, se sustituye en la desigualdad

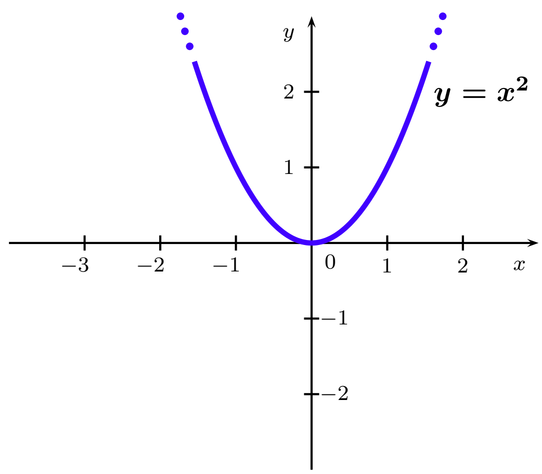
$$\left|(-1)+1\right| + \left|(0)\right| = \left|0\right| + \left|0\right| = 0 < 1,$$

puesto que, se cumple la desigualdad, entonces la región es



Región $\left|x+1\right| + \left|y\right| \leq 1$

- Para $y \leq x^2$. Graficamos la curva $y = x^2$, la cual es la parábola básica



Elegimos un punto arbitrario en el plano cartesiano, por ejemplo $\left(-1,0\right)$, se sustituye en la desigualdad.

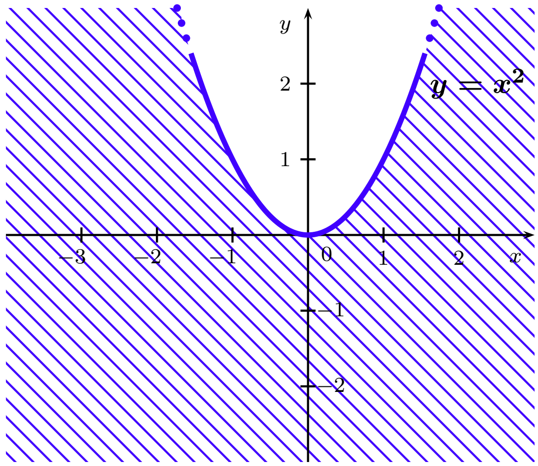
Observemos que,

$$y \leq x^2 \qquad \Longrightarrow \qquad y - x^2 \leq 0,$$

así,

$$\left(0\right) - \left(-1\right)^2 = 0 - 1 = -1 \leq 0,$$

puesto que, se cumple la desigualdad, entonces la región es



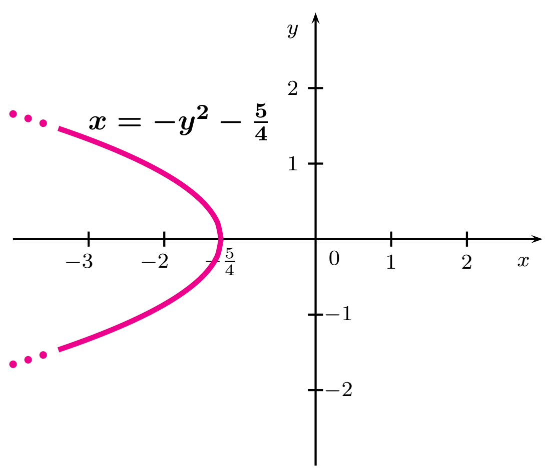
Región $y \leq x^2$

- Para $x + y^2 + \dfrac{5}{4} \geq 0$. Graficamos la curva $x + y^2 + \dfrac{5}{4} = 0$.

  Despejamos la variable x y obtenemos

$$x + y^2 + \frac{5}{4} = 0 \quad \Longrightarrow \qquad\qquad x = -y^2 - \frac{5}{4},$$

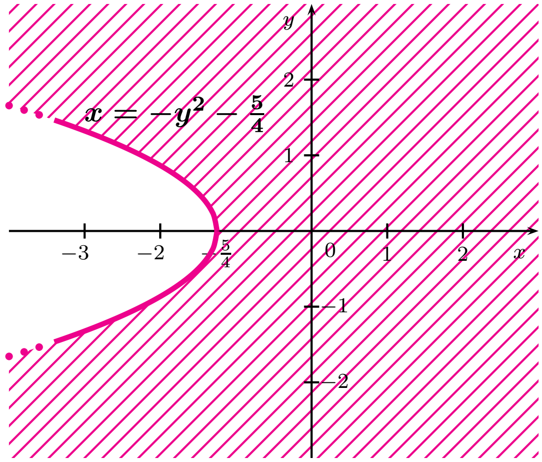
  la cual es una parábola en variable y, con vértice en $\left(-\dfrac{5}{4}, 0\right)$ que abre hacia la izquierda



  Elegimos un punto arbitrario en el plano cartesiano, por ejemplo $\left(0, 0\right)$, se sustituye en la desigualdad

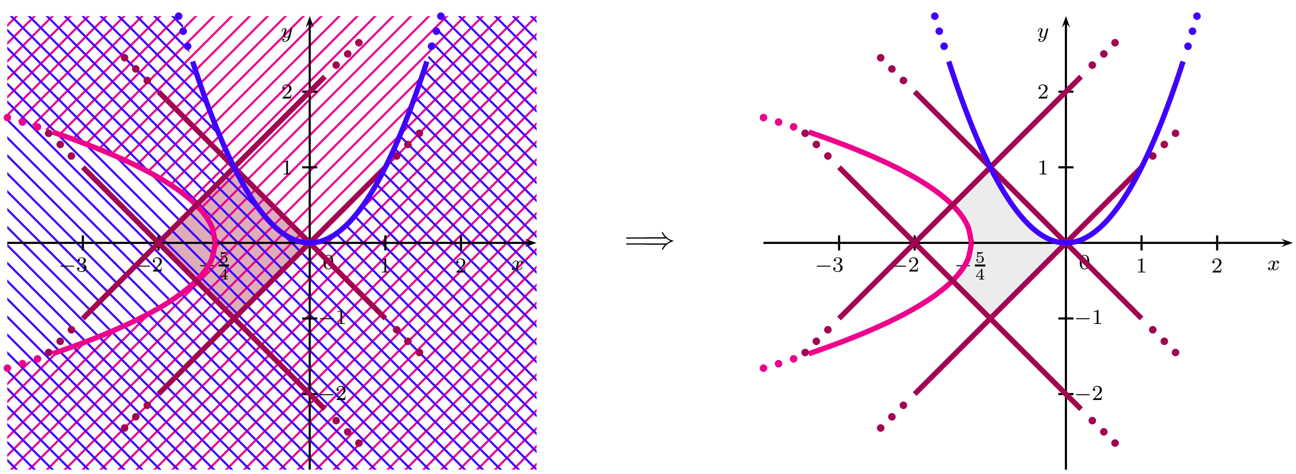
$$\left(0\right) + \left(0\right)^2 + \frac{5}{4} = 0 + 0 + \frac{5}{4} = \frac{5}{4} \geq 0,$$

  puesto que, se cumple la desigualdad, entonces la región es

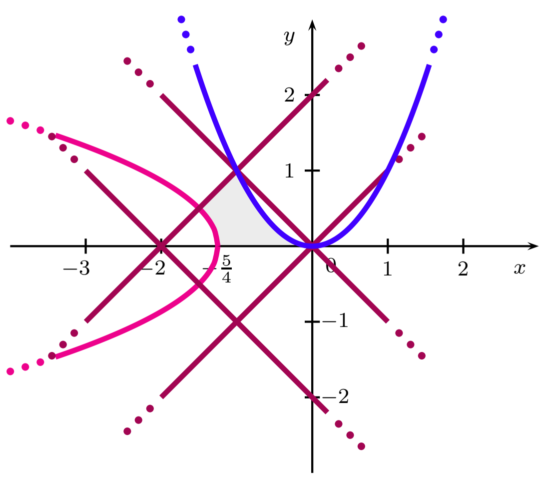


Región $x + y^2 + \dfrac{5}{4} \geq 0$

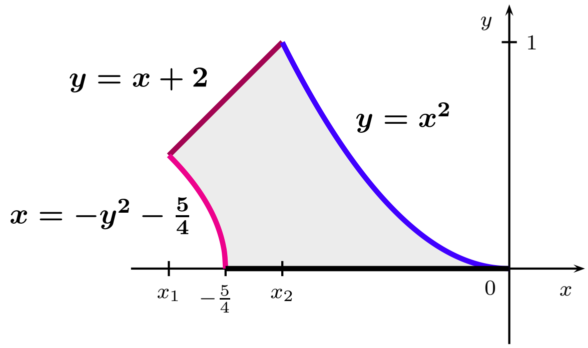
A continuación, hacemos la representación gráfica de todas las regiones obtenidas en un mismo plano cartesiano y se obtiene



Por último, se pide solo la parte de la región del segundo cuadrante, así, la región



Realizamos un zoom de la región



Buscamos los puntos de intersección entre las curvas

- Para $x = -y^2 - \dfrac{5}{4}$ y $y = x + 2$.

  Sustituimos $y = x + 2$ en $x = -y^2 - \dfrac{5}{4}$.

$$x = -\left(x+2\right)^2 - \frac{5}{4} \quad \Longrightarrow \quad x = -\left(x^2 + 4x + 4\right) - \frac{5}{4} \quad \Longrightarrow \quad x = -x^2 - 4x - 4 - \frac{5}{4}$$

$$\Longrightarrow \quad x = -x^2 - 4x - \frac{21}{4} \quad \Longrightarrow \quad x^2 + 5x + \frac{21}{4} = 0,$$

  aplicamos la resolvente con $a = 1$, $b = 5$ y $c = \dfrac{21}{4}$ y se obtiene

$$x_0 = -\frac{7}{2} \qquad \text{y} \qquad x_1 = -\frac{3}{2}.$$

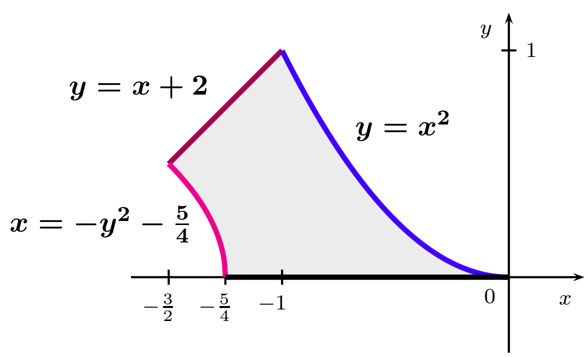
- Para $y = x + 2$ y $y = x^2$. Igualamos las curvas

$$x^2 = x + 2 \qquad \Longrightarrow \qquad x^2 - x - 2 = 0,$$

  aplicamos la resolvente con $a = 1$, $b = -1$ y $c = -2$ y se obtiene

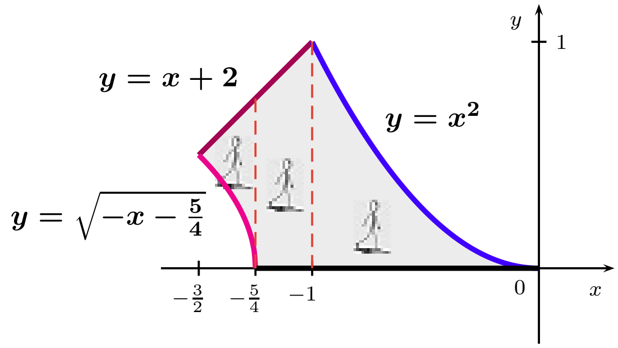
$$x_2 = -1 \qquad \text{y} \qquad x_3 = 2.$$

Entonces



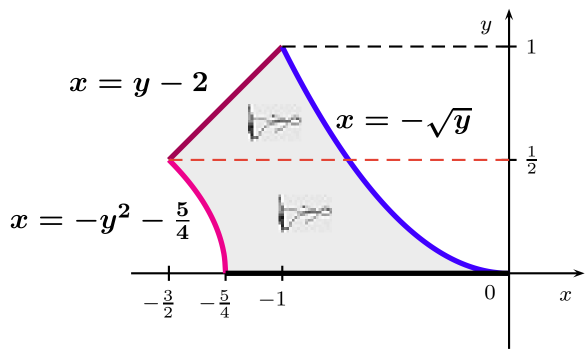
De aquí, el área, A, viene dada por

- Respecto a x



$$A = \int_{-3/2}^{-5/4} \left(x + 2 - \sqrt{-x - \frac{5}{4}} \right) dx + \int_{-5/4}^{-1} \Big(x + 2 - 0 \Big) dx + \int_{-1}^{0} \Big(x^2 - 0 \Big) dx$$

- Respecto a y



$$A = \int_{0}^{1/2} \left(-\sqrt{y} - \left(-y^2 - \frac{5}{4} \right) \right) dy + \int_{1/2}^{1} \Big(-\sqrt{y} - \big(y - 2 \big) \Big) dy$$

Calculamos el área con respecto a y

$$\begin{aligned} A &= \int_{0}^{1/2} \left(-\sqrt{y} - \left(-y^2 - \frac{5}{4} \right) \right) dy + \int_{1/2}^{1} \Big(-\sqrt{y} - \big(y - 2 \big) \Big) dy \\ &= \int_{0}^{1/2} \left(-\sqrt{y} + y^2 + \frac{5}{4} \right) dy + \int_{1/2}^{1} \Big(-\sqrt{y} - y + 2 \Big) dy \\ &= \left(-\frac{2}{3}\sqrt{y^3} + \frac{y^3}{3} + \frac{5}{4} y \right|_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1/2}} + \left(-\frac{2}{3}\sqrt{y^3} - \frac{y^2}{2} + 2y \right|_{\mathbf{1/2}}^{\mathbf{1}} \\ &\overset{\text{T.F.C.}}{=} -\frac{2}{3}\sqrt{\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)^3} + \frac{\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)^3}{3} + \frac{5}{4}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right) - \left(-\frac{2}{3}\sqrt{(\mathbf{0})^3} + \frac{(\mathbf{0})^3}{3} + \frac{5}{4}(\mathbf{0}) \right) \end{aligned}$$

$$+\left[-\frac{2}{3}\sqrt{\left(\mathbf{1}\right)^3}-\frac{\left(\mathbf{1}\right)^2}{2}+2\left(\mathbf{1}\right)-\left(-\frac{2}{3}\sqrt{\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)^3}-\frac{\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)^2}{2}+2\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)\right)\right]$$

$$=-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{8}}+\frac{\frac{1}{8}}{3}+\frac{5}{8}-\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+2+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{8}}+\frac{\frac{1}{4}}{2}-1$$

$$=\cancel{-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{8}}}+\frac{1}{24}+\frac{5}{8}-\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+2+\cancel{\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{8}}}+\frac{1}{8}-1$$

$$=\frac{1}{24}+\frac{6}{8}-\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{24}+\frac{3}{4}-\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+1=\frac{1+18-16-12+24}{24}=\frac{5}{8}$$

Luego, $A=\frac{5}{8}$. ★

5. (5 ptos) Sea $y = g(x)$ una función diferenciable en todo su dominio. Demuestre que g es una primitiva de la función

$$f(y) = \frac{\sec^{1/2}\left(\arctan\left(y+1\right)\right)}{\sqrt[4]{y^2+2y+2}}.$$

Solución : Para conocer una primitiva de la función f, integramos respecto a y, así calculamos

$$\int \frac{\sec^{1/2}\left(\arctan\left(y+1\right)\right)}{\sqrt[4]{y^2+2y+2}}\,dy.$$

Completamos cuadrado y obtenemos

$$\int \frac{\sec^{1/2}\left(\arctan\left(y+1\right)\right)}{\sqrt[4]{y^2+2y+2}}\,dy = \int \frac{\sec^{1/2}\left(\arctan\left(y+1\right)\right)}{\sqrt[4]{\left(y+1\right)^2+1}}\,dy.$$

Hacemos el cambio trigonométrico

$$y+1 = \tan t \qquad \Longrightarrow \qquad dy = \sec^2 t\,dt$$

y la integral se transforma

$$\int \frac{\sqrt{\sec\left(\arctan\left(y+1\right)\right)}}{\sqrt[4]{\left(y+1\right)^2+1}}\,dy = \int \frac{\sqrt{\sec\left(\arctan\left(\tan t\right)\right)}}{\sqrt[4]{\tan^2 t+1}}\sec^2 t\,dt = \int \frac{\sqrt{\sec t}}{\sqrt[4]{\sec^2 t}}\sec^2 t\,dt$$

$$= \int \frac{\sqrt{\sec t}}{\sqrt{\sec t}}\sec^2 t\,dt = \int \sec^2 t\,dt = \tan t + C_1$$

$$= y + 1 + C_1 = y + C = g(x) + C.$$

Luego, una primitiva de la función

$$f(y) = \frac{\sec^{1/2}\left(\arctan\left(y+1\right)\right)}{\sqrt[4]{y^2+2y+2}}$$

viene dada por la función g. ★